

В чем проблема?



Известно, что спортсмены умеют «гасить» удар, напрягая группу мышц в районе контакта. Этот прием используется борцами при падении на ковер, футболистами при приеме мяча головой, каратистами, которые могут выдержать очень сильный удар.

Способность скелетных мышц защищать суставы от травм за счет рассеяния и поглощения волновой энергии сформировалась в результате эволюции.

По-видимому, в процессе адаптации части океанских обитателей к жизни на суше появилась необходимость обезопасить организмы от ударных нагрузок, вызванных бегом, прыжками, а также активностью, связанной с охотой, схватками самцов и другими действиями в рамках межвидовой и внутривидовой конкуренции. Вероятность травмы уменьшается за счет напряжения мышц в момент, предшествующий удару; при этом субъект как бы «управляет» диссипативными и упругими характеристиками своих мышц, повышая их эффективную динамическую вязкость и «растягивая» характерное время ударного воздействия.

Вязкоупругие свойства мышечной ткани, составляющей 40% массы тела, изучены недостаточно. Разброс измерений модуля Юнга: от 1 кПа до 1000 кПа. Мало данных по сдвиговому модулю упругости, являющемуся наиболее информативным параметром при диагностике патологических изменений в мягких тканях. Еще меньше данных по динамической вязкости мышц. Однако недавно наблюдалось интересное явление: значительный (на 2 порядка) рост коэф поглощения волны, усиливающийся с ростом напряжения мышцы. Это явление не имеет объяснения; нет и физической модели, адекватно описывающей процесс.

Недавний эксперимент

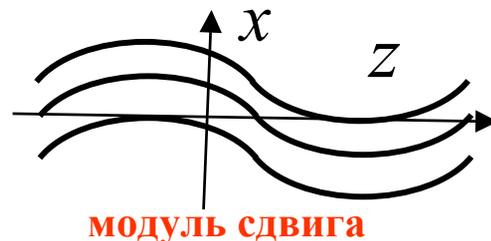
Единственный и весьма грубый эксперимент, который нам известен – это Levinson S., Catheline S., Fink M. Anisotropic elasticity & viscosity deduced from supersonic shear imaging in muscle. // 2004 Annual Report. Rochester Center for Biomedical Ultrasound. P. 17. 2004.

Данные по сдвиговым модулям (кПа), измеренным для поперечных волн, бегущих вдоль и поперек мышцы, приведены ниже в таблице. Третья строка – это аппроксимация второй (для модулей при распространении вдоль волокон) линейной функцией $G = A \cdot P + B$, $A = 35 \text{ kPa} / \text{kg}$, $B = 25 \text{ kPa}$

Здесь P (кГ) – приложенная к мышце нагрузка, A, B – константы.

Нагрузка	0 кГ	0.4 кГ	0.8 кГ	1.2 кГ	1.6 кГ	2.0 кГ
Вдоль волокон	7.3 кПа	47.2 кПа	50.8 кПа	59.7 кПа	82.5 кПа	94.6 кПа
Лин аппрокс	25 кПа	39 кПа	53 кПа	67 кПа	81 кПа	95 кПа
Поперек волок	1.3 кПа	1.8 кПа	4.1 кПа	Нет	Нет	Нет

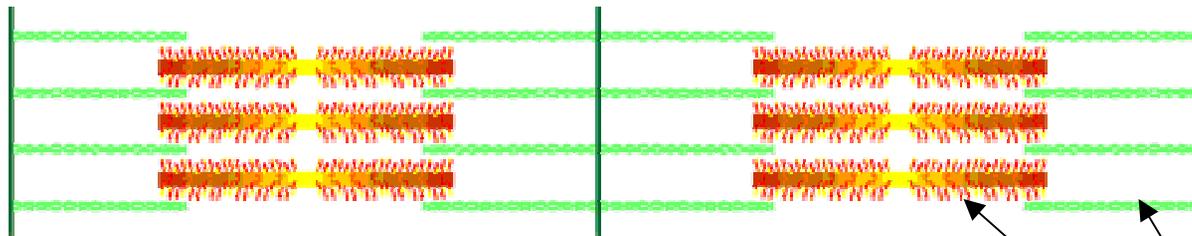
Рост модуля вдоль волокон объясняем так. Скорость волны не зависит от поляризации, и поэтому эксп данные однозначны. На рис. -деформации в волне, бегущей вдоль z и поляризованной вдоль x .



Волокно – это стержень, с 2-мя видами упругости: 1. собств; 2. упр натяжения. Для среды из стержней

$$G = A \cdot P + B, \quad B = EI k^2$$

Структура мышечного волокна

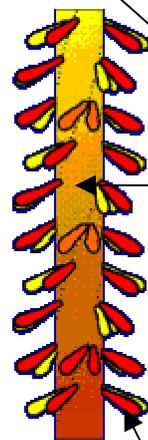


Саркомер

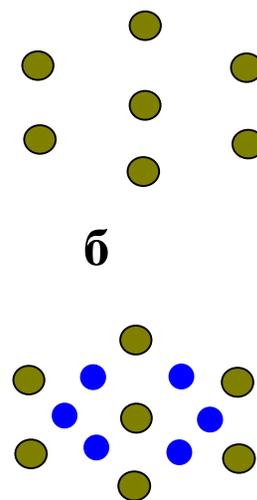
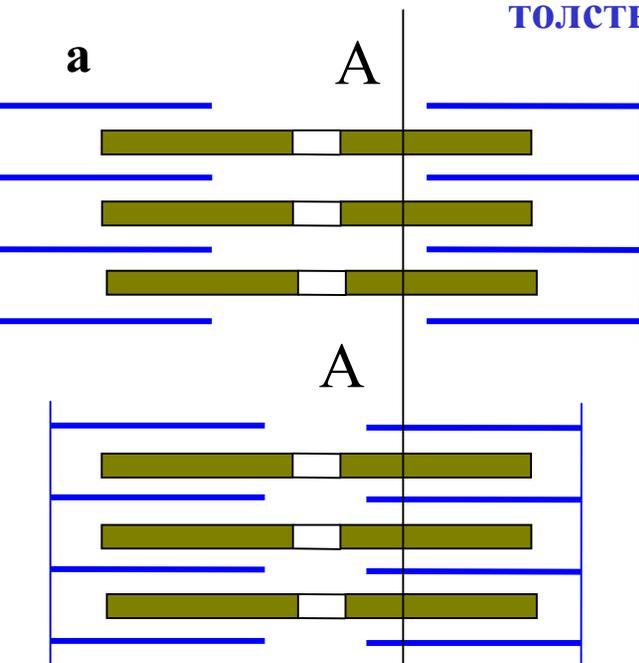
Волокно состоит примерно из 10000 последовательных саркомеров, каждый из которых, содержит 10^6

нитей: тонких (белок актин) и толстых (миозин). «Актомиозин» - эффективный механо-химический преобразователь энергии АТФ

Пары тонких и толстых нитей параллельны и могут контактировать через «миозиновые мостики». Эти мостики расположены упорядоченно на толстых нитях



МИОЗИНОВЫЕ МОСТИКИ



(а) Схема саркомера и его сокращения: решетки нитей вдвигаются друг в друга. (б) Сечение саркомера по АА (гексагональная симметрия)



Анизотропные свойства мышцы

Саркомер имеет гексагональную симметрию. Его форма не изменяется при повороте вокруг оси на угол, кратный $\pi/3$. Но соседние саркомеры повернуты на малый случайный угол, саркомеров много, дисперсия поворотов велика и эта симметрия исчезает. Но в мышце сохраняется анизотропия упругих свойств в направлении оси волокна и в ортогональном направлении; в поперечном сечении мышцы, очевидно, все направления равноправны.

Волн ур-ние для анизотр среды

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_k \partial x_l}$$

Мы показали, что в мышце между модулями имеются жесткие связи

$$a - c = d + b, \quad f - c = 2d$$

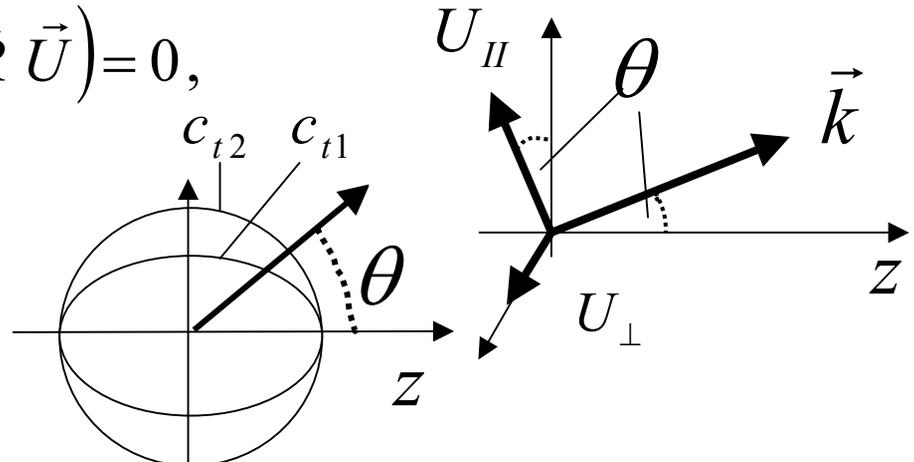
В такой среде тензор модулей упругости имеет только 5 независимых компонент

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} = a, \quad \lambda_{xyxy} = b, \quad \lambda_{xxyy} = a - 2b, \\ \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz} = c, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} = d, \quad \lambda_{zzzz} = f$$

Ковариантная форма ВУ для мышцы

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + \text{rot rot}(\hat{R} \vec{U}) = 0,$$

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$



Таким образом, для сдвиговых волн в мышечной ткани формируется более высокая симметрия. Она характеризуется лишь двумя модулями упругости: b, d

Модифицированная Модель Дещеревского

$$\frac{dn}{dt} = k_1 \alpha_0 \beta l - k_1 (n + m) - \frac{n}{\delta} \frac{dl}{dt}, \quad n, m - \text{числа тянущих и тормозящих мостиков, } l - \text{укорочение половинки саркомера, } P - \text{приложенное к мышце внешнее напряжение. Константа } k_1 \text{ характеризует скорость замыкания свободных мостиков, } k_2 - \text{ скорость размыкания замкнутых мостиков.}$$
$$\frac{dm}{dt} = -k_2 m + \frac{n}{\delta} \frac{dl}{dt},$$
$$P = (n - m) f.$$

δ - предельное смещение мостика, при котором тянущая сила становится тормозящей, f - развиваемая мостиком сила. Число активных мостиков, изменяющееся в процессе колебаний, обозначено как $\alpha(l) = \alpha_0 \beta l$, где β - константа укорочения саркомера

Мат Модель Дещеревского основана на «скользящей модели мышцы», установленной Х.Хаксли (Huxley) на основании электронно-микроскопических исследований.

Сейчас есть более совершенные модели мышечного сокращения. Однако уже первая простая содержит параметры, необходимые для анализа демпфирующих свойств мышцы. Уточнение деталей, связанных со сложной механохимической динамикой, может быть произведено позднее. Численные данные параметров измерены, напр.

для портняжной мышцы лягушки

$$\alpha_0 = 10^{13} \text{ см}^{-2} \quad f = 3 \cdot 10^{-7} \text{ дин} \quad R = 10^{-4} \text{ см}$$
$$k_2 = 150 \text{ с}^{-1} \quad k_1 = 50 \text{ с}^{-1} \quad \delta = 10^{-6} \text{ см} \quad \beta = 1.4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$$

Импульсное ударное воздействие

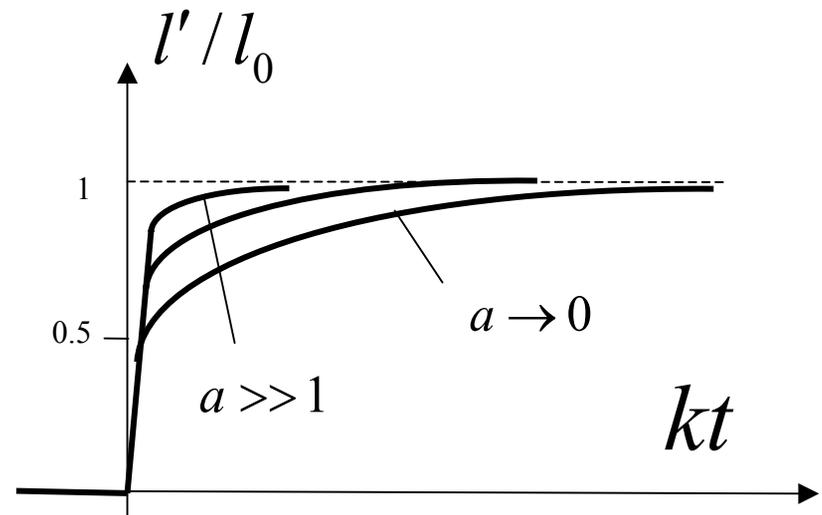
Точное решение, моделирующее «быстрые» импульсные нагрузки длительностью меньше 0.01 с или периодические воздействия с частотами выше 100 Гц

$$\frac{l_s - l}{\delta} = \ln \frac{n}{n_s} = \ln \left[e^{-\frac{k}{2}t} + \frac{1}{2P_s} \int_0^t e^{-\frac{k}{2}(t-\tau)} \left(\frac{d}{d\tau} + k \right) P(\tau) d\tau \right]$$

$a = P_0 / P_s$ - отношение напряжения на падающем фронте P_0 к статическому напряжению мышцы P_s

Увеличение продолжительности воздействия (длительности фронта) приводит к уменьшению максимальных значений силы, действующей на суставы

«Затягивание» удара из-за замыкания дополнительных мостиков



Гармоническая нагрузка и вязкость

Если внешняя нагрузка изменяется по гармонич 3-ну $P = P_s + P_0 \cos(\omega t)$ укорочение саркомера содержит пост составляющую и высшие гармоники. Установившееся решение

$$\frac{l'}{\delta} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a} \right)^j \cos(j\omega t + j\varphi)$$

При сильном изометрическом напряжении мышцы режим ее колебаний почти

линеен $\frac{l_s - l}{\delta} = -\frac{a^2}{4} + a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a^2}{4} \cos(2\omega t + 2\varphi) + \frac{a^3}{12} \cos(3\omega t + 3\varphi) + \dots$

Нелинейность отклика расслабленной мышцы сильнее, чем мышцы напряженной.

Это связано с большей асимметрией реакции расслабленной мышцы на сжимающую и растягивающую нагрузку Интересно, что саркомер не должен реагировать на

внешнее воздействие $P(t) = P_1 \exp(-k_1 t) + P_2 \exp(-k_2 t)$

Вязкость мышцы

$$\eta = \frac{1}{6\pi R} \frac{\frac{P_s}{\alpha_0 \delta} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2} \right) + \frac{\beta f}{k_1} + \Omega^2 \left(\frac{\beta f}{k_2} + \frac{P_s}{\alpha_0 \delta} \frac{1}{k_1} \right)}{\left(\Omega^2 + \frac{k_1}{k_2} \right) \left(\Omega^2 + \frac{k_2}{k_1} \right)} \quad \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{k_1 k_2}}$$

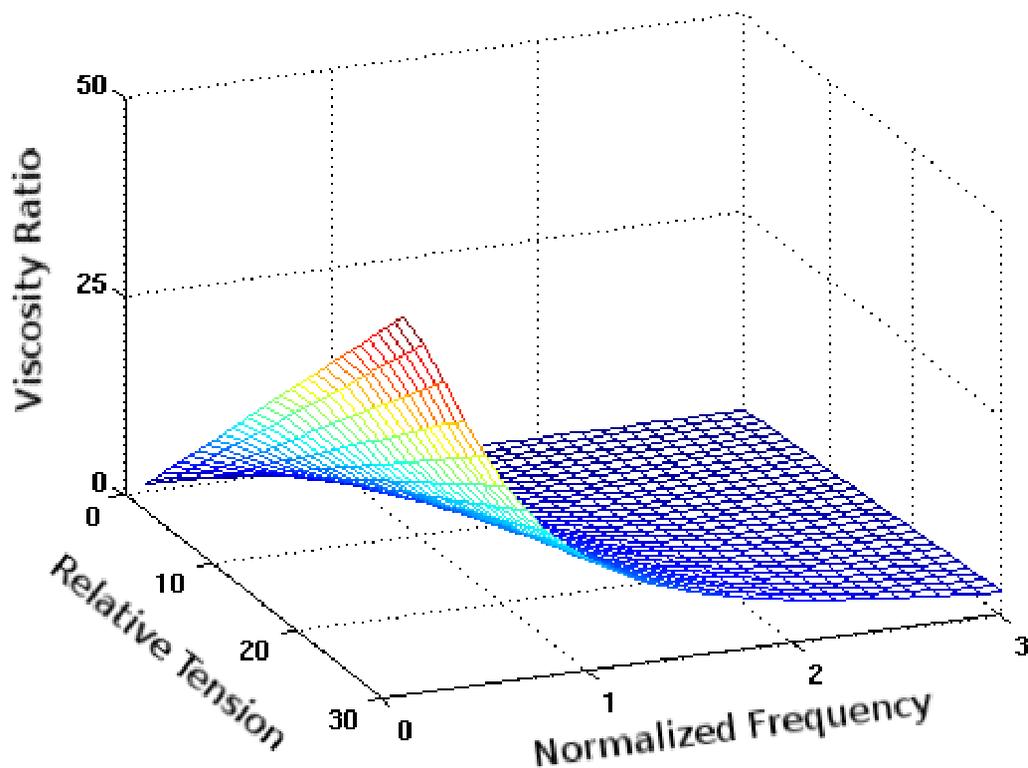
На низких частотах

$$\eta = \eta_0 \left(1 + P_s / P_* \right)$$

$$P_* \approx 2,5 \cdot 10^4 \text{ Дин / кв.см} \quad \eta_0 \approx 0,045 \text{ Пуаз}$$

Видно, что даже при небольшой нагрузке P_s , равной 1 кГ/см², вязкость возрастает в 40 раз

Вязкость мышцы

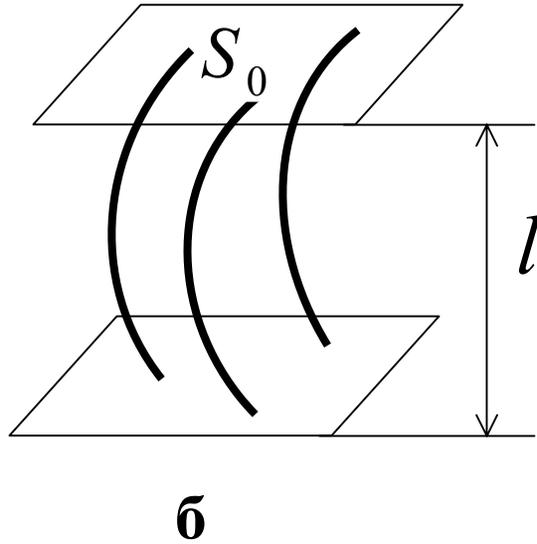
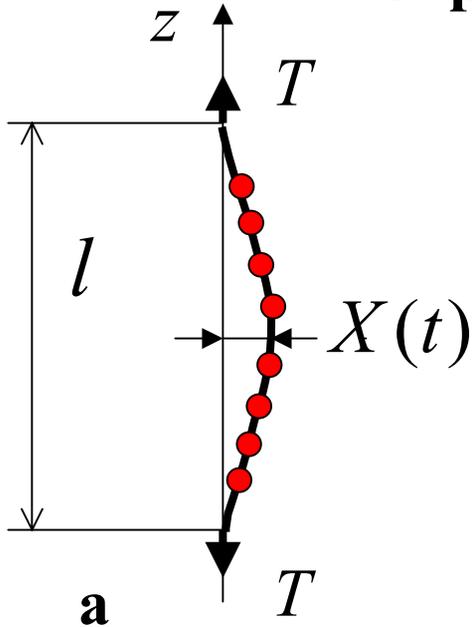


Вязкость убывает как Ω^{-2}

На частотах порядка сотен Гц вязкость, возникающая за счет активности миозиновых мостиков, становится малой

На ВЧ мостики уже не успевают за быстро осциллирующей нагрузкой; внутренние процессы перестройки в саркомерах «заморожены» и этот механизм демпфирования исчезает.

Струнный механизм демпфирования



Одиночная струна, колеблющаяся в вязкой жидкости (а) и модель мышечного волокна как ансамбля струн (б)

разность смещений колеблющейся струны и жидкости $s = X - \xi$

M - масса шариков и $\frac{1}{2}$ вытесненной жидкости в ед объема среды

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} + B \frac{ds}{dt} + B \frac{R}{\sqrt{\pi \nu}} \int_{-\infty}^t \frac{d^2 s}{d\tau^2} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + Ks = -K\xi$$

K - жесткость нитей на ед площади

Коэф затухания колебаний из-за трения нитей о вязкую жидкость

$$\alpha = \frac{B}{2\rho_L} \frac{\left(1 + R\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) K^2}{\left(K - M\omega^2 - \omega\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} RB\right)^2 + \omega^2 B^2 \left(1 + R\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right)^2}$$

Макс демпфирование

$$\alpha_{\max} = \frac{1}{2\rho_L} \left[B + \omega^2 \frac{M^2}{B} \right]$$

достигается при натяжении

$$K_{\max} = \frac{B^2}{M} + M\omega^2$$

При оптим натяжении сдвиговая волна полностью затухает после 2 – 3 периодов колебаний (частоты ~ кГц)